Κεφάλαιο 1ο 15/01/2018

Άσκηση 1η: Να μετατραπεί ο αριθμός $(152.6640625)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Λύση

Ακέραιο μέρος 152

	Υπόλοιπο	Πηλίκο
152 : 2	0	76
76 : 2	0	38
38 : 2	0	19
19 : 2	1	9
9 : 2	1	4
4 : 2	0	2
2 : 2	0	1
1 : 2	1	0

Άρα, $(152)_{10} = (10011000)_2$

Κλασματικό μέρος $x = 0.6640625$

$2x = 1.328125$	$a_{-1} = 1$	$y_1 = 0.328125$
$2y_1 = 0.65625$	$a_{-2} = 0$	$y_2 = 0.65625$
$2y_2 = 1.3125$	$a_{-3} = 1$	$y_3 = 0.3125$
$2y_3 = 0.625$	$a_{-4} = 0$	$y_4 = 0.625$
$2y_4 = 1.25$	$a_{-5} = 1$	$y_5 = 0.25$
$2y_5 = 0.5$	$a_{-6} = 0$	$y_6 = 0.5$
$2y_6 = 1$	$a_{-7} = 1$	$y_7 = 0$

Άρα, $(0.6640625)_{10} = (0.1010101)_2$

Συνεπώς, $(152.6640625)_{10} = (10011000.1010101)$

2. Πως θα υπολογίσουμε την ποσότητα $\frac{x^2-y^2}{x-y}$, x,y ομόσημοι

ως $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ ή $x+y$.

Ο δεύτερος τρόπος $(x+y)$ είναι καλύτερος.

πρόσθεση : $|\varepsilon| \le 2u \frac{|x|+|y|}{|x+y|}$

Η αφαίρεση είναι μη ευσταθής πράξη.

3. Εαν έχουμε $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{2}{w}}$ είναι προτιμότερο να κάναμε 3 διαιρέσεις ή 2 πολλαπλασιασμούς και μια διαίρεση.

Το δεύτερο δηλαδή $\frac{x \cdot w}{y \cdot 2}$ γιατί έχει λιγότερες πράξεις.

Εαν έχουμε να προσθέσουμε ομόσημους αριθμούς τότε μας συμφέρει να τους ταξινομήσουμε κατά αύξουσα σειρά.

Κεφάλαιο 2ο : Εξισώσεις

Άσκηση: Δίνεται η εξίσωση $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{2} = 0$ i) Να αποδειχθεί ότι αυτή έχει μια μοναδική απλή ρίζα $x^* \in (0, \pi)$

ii) Να αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος $x_{n+1} = \sin x_n + \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, συγκλίνει $\forall\, x_0 \in [0, \pi]$

Λύση

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= \sin 0 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \\ f(\pi) &= \sin\pi - \pi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \pi < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Άρα, } \exists\, x^* \in [0, \pi]$$

$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$. Επομένως, η f είναι φθίνουσα.
Άρα, έχει μοναδική ρίζα $x^* \in (0, \pi)$

$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (0, \pi) \Rightarrow$ η x^* είναι απλή.

$\varphi(x) = \sin x + \frac{1}{2}$

$\varphi'(x) = \cos x$, $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\varphi(0) = \frac{1}{2}$ $\quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\quad \varphi(\pi) = \frac{1}{2}$

Επομένως, για $x \in [0, \pi]$. $\varphi(x) \in [1/2, 3/2] \subset [0, \pi] \Rightarrow$ καλά ορισμένη.

$|\varphi'(x)| = |\cos x| \leq 1$, $x \in [0, \pi]$

$|\varphi'(x)| = |\cos x| \leq \cos\frac{1}{2} < 1$ ~~[illegible]~~ $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

$\Rightarrow$ η φ είναι συστολή

Άσκηση 5: Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - x - 2 = 0$. Να αποδειχτεί ότι ο αλγόριθμος της μεθόδου Νεύτωνα συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [1, +\infty)$. Να γίνει εφαρμογή για την προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια 2 δ.ψ. με $x_0 = 1$.

Λύση

$$f(1) = 1^3 - 1 - 2 = -2 < 0$$
$$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0, \ \forall x \in [1, +\infty)$$
$$f''(x) = 6x > 0, \ \forall x \in [1, +\infty)$$

ισχύει το θ. ολικής σύγκλισης.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 2}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2 - 1}$$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{2 \cdot 1^3 + 2}{3 \cdot 1^3 - 1} = 2$

$|x_2 - x_1| = 0.3636 > 0.005$

$x_2 = 1.6364$

$|x_3 - x_2| = 0.106 > 0.005$

$|x_4 - x_3| = 0.009 > 0.005$

$|x_5 - x_4| = 0.0006 < 0.005$

$x_3 = 1.5$

$x_4 = 1.52144$

$x_5 = 152138$

$x^* = 1.52$ σε 2 δ.ψ. ή 1.521 σε 3 δ.ψ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Συστήματα

Άσκηση 6: Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A με LU παραγ.

Λύση

$$\begin{array}{c|cccc} & \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & \underline{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \underline{1} & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\underline{1}$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $AX=I \Leftrightarrow LUX=I \Leftrightarrow \begin{cases} LY=I \\ UX=Y \end{cases}$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Y^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = X^T = X = A^{-1}$$

Άσκηση 7

Να δίνει η LU ανάλυση του PA, P μετασχετικός χρησιμοποιώντας Απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση.

πολλαπλασιαστές.

Λύση

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} \end{array} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$0 \quad \frac{2}{2}$$

$$\underline{1}$$

Άρα

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(αυτός είναι ο μετασχετικός)

PA = LU

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ & & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

and $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$